

ПЛАН УЧЕБНОГО ЗАНЯТИЯ

по дисциплине «Математика»

дата 08.12.2023

Новый материал (конспект в рабочую тетрадь!!!)

Тема: «Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции»

Если в задаче требуется найти максимальное или минимальное значение функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, выполняем следующие действия:

1. Найти производную функции: $f'(x)$.
2. Решить уравнение $f'(x) = 0$. Если корней нет, пропускаем третий шаг и переходим сразу к четвертому.
3. Из полученного набора корней вычеркнуть все, что лежит за пределами отрезка $[a; b]$. Оставшиеся числа обозначим x_1, x_2, \dots, x_n — их, как правило, будет не много.
4. Подставим концы отрезка $[a; b]$ и точки x_1, x_2, \dots, x_n в исходную функцию. Получим набор чисел $f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$, из которого выбираем наибольшее или наименьшее значение — это будет ответ.

Задача 1. Найти наибольшее значение функции $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 7$ на отрезке $[-5; 0]$.

Решение. Для начала найдем производную:

$$y' = (x^3 + 3x^2 - 9x - 7)' = 3x^2 + 6x - 9.$$

Затем решаем уравнение: $y' = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x - 9 = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow x = -3; x = 1$.

Вычеркиваем корень $x = 1$, потому что он не принадлежит отрезку $[-5; 0]$.

Осталось вычислить значение функции на концах отрезка

$$\text{и в точке } x = -3: y(-5) = (-5)^3 + 4 \cdot (-5)^2 - 9 \cdot (-5) - 7 = -12;$$

$$y(-3) = (-3)^3 + 4 \cdot (-3)^2 - 9 \cdot (-3) - 7 = 20;$$

$$y(0) = 0^3 + 4 \cdot 0^2 - 9 \cdot 0 - 7 = -7.$$

Очевидно, наибольшее значение равно 20 — оно достигается в точке $x = -3$.

$$\text{Ответ: } \max_{[-5; 0]} y = y(-3) = 20$$

Задача 2. Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 3x + 4$ на отрезке $[-2; 0]$.

Решение. Найдём производную заданной функции:

$$(x^3 - 3x + 4)' = 3x^2 - 3$$

Найдем нули производной:

$$y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$$
$$x_1 = -1 \quad x_2 = 1$$

Указанному в условии интервалу принадлежит точка $x = -1$.

Вычисляем значения функции в точках $-2, -1$ и 0 :

$$y(-2) = (-2)^3 - 3(-2) + 4 = 2$$

$$y(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 4 = 6$$

$$y(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 + 4 = 4$$

Наименьшее значение функции равно 2 — оно достигается в точке $x = -2$.

$$\text{Ответ: } \min_{[-2;0]} y = y(-2) = 2$$

Задача 3. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = x^3 - 6x^2$ на отрезке $[-3;3]$.

Решение. Найдём производную заданной функции:

$$(x^3 - 6x^2)' = 3x^2 - 12x$$

Найдем нули производной:

$$y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow 3x(x - 4) = 0$$
$$x_1 = 0 \quad x_2 = 4$$

Указанному в условии интервалу принадлежит точка $x = 0$.

Вычисляем значения функции в точках $-3, 0$ и 3 :

$$y(-3) = (-3)^3 - 6(-3)^2 = -81$$

$$y(0) = 0^3 - 6 \cdot 0^2 = 0$$

$$y(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 = -27$$

Наименьшее значение функции равно -81 — оно достигается в точке $x = -3$.

Наибольшее значение функции равно 0 — оно достигается в точке $x = 0$.

$$\text{Ответ: } \max_{[-3;3]} y = y(-3) = -81, \min_{[-3;3]} y = y(0) = 0$$

Конспект отправляем на электронную почту oles.udalova@yandex.ru